Aufgabe 1

a) Für welche $t \in IR$ ist $\begin{vmatrix} 2-t & 1 & -1 \\ 1 & 1-t & 0 \\ -1 & 0 & 1-t \end{vmatrix} = 0$?

b) Wie lauten für diese t-Werte jeweils die Lösungen des Systems

$$\begin{array}{llll} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & =t\cdot x_1 \\ x_1 & +x_2 & & =t\cdot x_2 \\ -x_1 & & +x_3 & =t\cdot x_3 \end{array}$$

<u>Matrizen</u>

1) Matrizenaddition und –subtraktion: Für (m,n)-Matrizen A und B vom gleichen Typ gilt:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & ... & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & ... & a_{2n} \pm b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & ... & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

A + B = B + A
(A + B)+ C = A + (B + C)
A + 0 = A
A – A = 0

2) Multiplikation einer Matrix $A_{(m,n)}$ mit einer reellen Zahl r:

$$r\cdot A = \begin{pmatrix} r\cdot a_{11} & r\cdot a_{12} & ... & r\cdot a_{1n} \\ r\cdot a_{21} & r\cdot a_{22} & ... & r\cdot a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ r\cdot a_{m1} & r\cdot a_{m2} & ... & r\cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

(r + s) A = rA + sA
r(A + B) = rA + rB
r(sA) = (rs)A
1A = A
0A = 0

3) Multiplikation zweier Matrizen:

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,q)} = C_{(m,q)} \text{ mit } c_{mq} = \sum_{j=1}^{n} a_{mj} \cdot b_{qj}$$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot b_{j2} & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\cdot b_{jq} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot b_{j1} & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot b_{j2} & ... & \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\cdot b_{jq} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

(A + B)C = AC + BC
r(AB) = (rA)B

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 4 - 1\cdot 0 + 0\cdot 3 & 1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 0\cdot 5 \\ 2\cdot 4 + 0\cdot 0 + 1\cdot 3 & 2\cdot 1 + 0\cdot 2 + 1\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Berechne

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

4) Die transponierte Matrix

Wenn in einer (m,n)-Matrix A die Zeilen mit den entsprechenden Spalten vertauscht werden, so entsteht eine Matrix $\mathbf{A^T}$ vom Typ (n,m); die transponierte Matrix.

$$A_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T_{(m,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

$(A^T)^T = A$

$(rA)^T = rA^T$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

Aufgabe 3

Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne:

a) $(A \cdot B) \cdot C$

b) $(A \cdot B)^T$

c) $A \cdot (B + C^T)$

d) $A^T \cdot C^T + B$

5) Die inverse Matrix

Die Matrix A^{-1} ist eine inverse Matrix der quadratischen Matrix $A_{(m,n)}$ wenn gilt:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$,

wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Beispiel:

Man berechnet mithilfe des Gauß'schen Algorithmus' die zu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$ inverse Matrix:

1. Einheitsmatrix ergänzen

$$\left.\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right.$$

2. Multipliziere die erste Zeile mit (-2) und addiere sie mit der zweiten Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ -3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}$$

3. Multipliziere die erste Zeile mit (+3) und addiere sie mit der dritten Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1\end{array}$$

4. Multipliziere die zweite Zeile mit (-1)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1\end{array}$$

5. Multipliziere die zweite Zeile mit (-2) und addiere sie mit der dritten Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}$$

6. Subtrahiere die dritte Zeile von der ersten Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}$$

7. Multipliziere die dritte Zeile mit (-2) und addiere sie mit der zweiten Zeile

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 1\end{array}$$

Die inverse Matrix ist damit: $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -1\\ 4 & -5 & -2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Aufgabe 4

Berechne die inverse Matrix

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ -3 & -2 & -5\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 3\\ 2 & 4 & 1\\ 5 & 5 & 4\end{pmatrix}$

6) Die adjungierte Matrix

Die adjungierte Matrix dient für das Bestimmen von inversen Matrizen. Eine beliebige quadratische Matrix hat die Form:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Die Adjunkte zu dieser Matrix ist:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & c \\ g & i \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & b \\ g & h \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} a & c \\ d & f \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix} \end{pmatrix}^T$$

Mit $A^{-1} = \dfrac{adj(A)}{\det(A)}$ lässt sich jetzt jede inverse Matrix berechnen, sofern eine inverse Matrix A^{-1} zur Matrix A vorhanden ist.

Aufgabe 5

Berechne nun die inverse Matrix A mithilfe der adjungierten Matrix von Aufgabe 4a)