Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung - SEK II

Andy Timmermann

5. Ebenen

1 Ebenen

In einem kartesischen Koordinatensystem lässt sich ein Punkt als ein Paar von reellen Zahlen darstellen (in der ebenen Geometrie). Eine Ebene ist dann eine Menge von solchen Zahlenpaaren, deren Koordinaten eine lineare Gleichung erfüllen. Da der Begriff der Ebene ein wichtiges Element der Geometrie ist, wird er im Folgenden detailiert erklärt und dabei die Schwerpunkte aus der Schule aufgreifen .

1.1 Parameterdarstellung einer Ebene

Eine Ebene ist eine unendliche Fläche und kann mit Hilfe eines Punktes A und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festgelegt werden. Für jeden beliebigen Punkt X auf dieser Ebene gilt dann:

$$\vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v},$$

wobei $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Diese Art von Gleichung nennt sich Parameterdarstellung einer Ebene mit Stützvektor $\vec{A}$ und den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Beispiel 1: Seien der Punkt $A = (3/-2/0)$ und die Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Dann ergibt sich folgende Parameterdarstellung dieser eindeutig festgelegten Ebene:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

1.2 Koordinatengleichung einer Ebene

Eine Ebene lässt sich nicht nur als Parameterdarstellung beschreiben, sondern auch mit Hilfe einer Koordinatengleichung angeben. Es entsteht dabei eine lineare Gleichung. Hierbei spielt nun der Normalenvektor $\vec{n}$ eine große Rolle. Der Normalenvektor $\vec{n}$ (oder auch Lotvektor genannt) ist eine Normale (ein Lot), die orthogonal zur Ebene liegt. Mit einem Punkt und einem Normalenvektor lässt sich eine Ebene festlegen, sofern für den Veltor von A nach X gilt:

$$\overrightarrow{AX} \perp \vec{n} \qquad \text{und} \qquad \vec{n} \bullet \overrightarrow{AX} = 0$$

Schreiben wir $\overrightarrow{AX} = \vec{X} - \vec{A}$ und setzen dies in $\vec{n} \bullet \overrightarrow{AX} = 0$ ein, so erhalten wir:

$$0 = \vec{n} \bullet (\vec{X} - \vec{A}) = \vec{n} \bullet \vec{X} - \vec{n} \bullet \vec{A}$$

Also folgt:

$$\vec{n} \bullet \vec{X} = \vec{n} \bullet \vec{A}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung lässt sich bei gegebenem Ortsvektor A und Normalenvektor $\vec{n}$ eine Ebene in Koordinatenform aufstellen.

Beispiel 1: Seien $\vec{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ gegeben. Setzt man nun $\vec{n}$ und $\vec{A}$ in die Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$$

Rechnet man das Skalarprodukt aus, so erhält man $2x + 4y - 3z = 21$.

1.3 Umwandlung von Koordinatengleichung in Parameterdarstellung und umgekehrt

(1) Von Koordinatengleichung zu Parameterdarstellung:
Anhand eines Beispiels sollen die einzelnen Schritte erklärt werden. Ausgangspunkt soll folgende Koordinatengleichung sein:

$$x - 2y + 3z = 8$$

Zunächst muss ein Punkt gefunden werden, der diese Gleichung erfüllt; damit hat man bereits einen Stütz- bzw. Ortsvektor. Man findet leicht, dass z.B. $x = 0$, $y = -4$ und $y = 0$ die Gleichung erfüllt.
Der Punkt $A = (0/-4/0)$ liegt also in der Ebene. Der Stütz- bzw. Ortsvektor ist festgelegt. (Es gibt aber auch noch viele andere Möglichkeiten, je nach dem wie man x,y und z definiert.)
Der Normalenvektor lässt sich sofort aus der Koordinatengleichung ablesen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$$

Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die noch bestimmt werden, müssen orthogonal zu dem Normalenvektor $\vec{n}$ sein. Es muss also gelten:

$$\vec{n} \bullet \vec{u} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{n} \bullet \vec{v} = 0$$

Und eingesetzt erhält man

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = u_1 - 2 \cdot u_2 + 3 \cdot u_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix} = v_1 - 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 = 0$$

Um die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zu bestimmen, legt man jeweils zwei Koordinaten der Vektoren fest und berechnet dann die dritte Koordinate. Wichtig ist hierbei, dass die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ nicht kollinear zueinander sind. Sie dürfen also kein Vielfaches voneinander sein, denn dann würden sie in dieselbe Richtung zeigen und es würde keine Ebene aufgespannt werden.
Für $u_2 = 0$ und $u_3 = 1$ ergibt sich $u_1 = -3$. Analog erhält man für $v_2 = 1$ und $v_3 = 0$ die dritte Koordinate $v_1 = 2$. Also:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Nun hat man den Stütz- bzw. Ortsvektor und die Richtungsvektoren. Damit lässt sich eine Parameterdarstellung aufstellen:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

(2) Von Parameterdarstellung zu Koordinatengleichung:
Gegeben sei eine Parameterform einer Ebene:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}$$

Auch hier muss für die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gelten:

$$\vec{n} \bullet \vec{u} = 0 \qquad \text{und} \qquad \vec{n} \bullet \vec{v} = 0$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 4 \cdot n_3 = 0$$

Man erhält ein Gleichungssystem aus zwei Gleichungen mit drei Unbekannten. Dieses lineare Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren lösen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 &= 0 \\ 2 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 4 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Multipliziert man die zweite Gleichung mit (-1), so erhält man:

$$\begin{aligned} 3 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 &= 0 \\ (-2) \cdot n_1 - 1 \cdot n_2 - 4 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Addiert man nun beide Gleichungen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 3 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 &= 0 \\ n_1 - 2 \cdot n_3 &= 0 \end{aligned}$$

Wählt man $n_3 = 1$, so folgt: $n_1 = 2$. Setzt man n_1 und n_3 in die erste Gleichung ein, ergibt sich $n_2 = -8$. Also ist ein Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Als letzten Schritt bestimmt man die Gleichung $\vec{n} \bullet \vec{X} = \vec{n} \bullet \vec{A}$:

$$\vec{n} \bullet \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x - 8y + z$$

und

$$\vec{n} \bullet \vec{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 10 - 16 + 0 = -6$$

Es ergibt sich also folgende Koordinatengleichung:

$$2x - 8y + z = -6$$

1.4 Punkte auf Ebenen (Punktprobe)

Ein Punkt liegt auf einer Ebene genau dann, wenn die Koordinatengleichung einer Ebene erfüllt ist, oder wenn es eindeutige Parameterwerte (λ, μ) bei der Parameterform einer Ebene gibt. Dieses Verfahren wird auch Punktprobe genannt. Anhand zweier Beispiele soll dies nun erläutert werden.

Beispiel 1: Es soll überprüft werden, ob der Punkt $P = (4/1/-6)$ auf der Ebene $2x - 8y + z = -6$ liegt. Eine solche Punktprobe ist sehr einfach, da lediglich die Koordinaten des Punktes P in die Koordinatengleichung $2x - 8y + z = -6$ eingesetzt werden müssen $(x = 4, y = 1, z = -6)$:

$$2 \cdot 1 - 8 \cdot 4 - 6 = -6 = -6$$

Da diese Gleichung - wie man offensichtlich sieht - erfüllt ist, liegt der Punkt $P = (4/1/-6)$ auf der Ebene.

Beispiel 2: Liegt der Punkt $P = (4/2/-6)$ auf der Ebene $E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$?

Setzt man den Punkt P mit der Parameterform der Ebene gleich und haben λ und μ eindeutige Lösungen, so liegt der Punkt auf der Ebene. Ist dies nicht der Fall, so liegt der Punkt auch nicht auf der Ebene. Einsetzen liefert:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 4 &= 5 + 3\lambda + 2\mu \\ 2 &= 2 + \lambda + \mu \\ -6 &= 2\lambda + 4\mu \end{aligned}$$

Multipliziere die zweite Gleichung mit (-4)

$$\begin{aligned} 4 &= 5 + 3\lambda + 2\mu \\ -8 &= -8 - 4\lambda - 4\mu \\ -6 &= 2\lambda + 4\mu \end{aligned}$$

und addiere sie mit der letzten Gleichung

$$\begin{aligned} 4 &= 5 + 3\lambda + 2\mu \\ -8 &= -8 - 4\lambda - 4\mu \\ -14 &= -8 - 2\lambda \end{aligned}$$

Aus $-14 = -8 - 2\lambda$ folgt sofort $\lambda = 6$. Setzt man nun $\lambda = 6$ in die Gleichung $-8 = -8 - 4\lambda - 4\mu$ ein, so bekommt man $\mu = -6$. Dies scheint zunächst ein richtiges Ergebnis. Allerdings ergibt die erste Gleichung mit $\lambda = 6$ und $\mu = -6$:

$$4 \neq 5 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot (-6) = 11$$

Das Gleichungssystem ist nur dann eindeutig lösbar, wenn alle(!) Gleichungen erfüllt sind. Da dies nicht der Fall ist, liegt der Punkt P nicht auf der Ebene.

1.5 Lagebeziehungen zwischen Ebenen

1. Parallele Ebenen: Gegeben seien zwei Ebenen in Koordinatenform

$$E_1 : 2x + 8y - 6z = -2 \qquad \text{und} \qquad E_2 : 4x + 16y - 12z = d, \quad d \in \mathbb{R}$$

E_1 und E_2 sind genau dann parallel, wenn folgendes erfüllt ist:

$$E_1 = k \cdot E_2 \text{ für ein } k \in \mathbb{R}$$

oder anders formuliert, wenn

$$2x + 8y - 6z = k \cdot (4x + 16y - 12z) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Man sieht leicht, dass

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

für $k = 2$ erfüllt ist. Wer dies nicht sofort sieht, kann k mit Hilfe eines linearen Gleichungssytsems bestimmen. Kommen wir nun auf die Ebene E_2 in Koordinatengleichung $(4x + 16y - 12z = d)$ zurück. Für parallele Ebenen muss also gelten:

$$d \neq k \cdot (-2) = 2 \cdot (-2) = -4$$

Zusammengefasst: Die linke Seite der Koordinatengleichung von E_1 darf sich nur um ein Vielfaches (z.B. $k \in \mathbb{R}$) von der linken Seite der Koordinatengleichung von E_2 unterscheiden. Die rechte Seite der Koordinatengleichung von E_1 darf aber kein Vielfaches von der rechten Seite der Koordinatengleichung von E_2 sein (bzw. umgekehrt).

2. Identische Ebenen: Betrachtet man den Fall von parallelen Ebenen, so unterscheidet sich die Rechnung nur im letzten Schritt. Es liegen gerade dann zwei identische Ebenen E_1 und E_2 vor, wenn

$$d = k \cdot (-2) = 2 \cdot (-2) = 4$$

gilt.

3. Schnitt von Ebenen: Gegeben seien zwei Ebenen in Koordinatenform

$$E_1 : 4x + 8y - 6z = -2 \qquad \text{und} \qquad E_2 : 4x + 16y - 12z = d, \quad d \in \mathbb{R}$$

Auch hier würde für parallele Ebenen gelten:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Da diese Gleichung für kein $k \in \mathbb{R}$ erfüllt ist, liegt weder Parallelität noch Identität der beiden Ebenen E_1 und E_2 vor. Also schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgerade (s. 8.6).

1.6 Schnittgerade zwischen zwei Ebenen

Schneiden sich zwei Geraden, so gibt es einen Schnittpunkt. Bei Ebenen gibt es keinen Schnittpunkt, sondern eine Schnittgerade. Am besten lässt sich das Problem anhand eines Beispiels erklären.
Gegeben seien zwei Ebenen E_1 und E_2:

$$E_1 : 5x + 2y + 3z = 30 \qquad \text{und} \qquad E_2 : 10x + 7y - 12z = 45$$

Um die Schnittgerade - hier g genannt - zu bestimmen, müssen die Koordinaten x, y, z gelöst werden. Dazu stellt man ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen auf:

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 30 \\ 10x + 7y - 12z &= 45 \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit (-2)

$$\begin{aligned} -10x - 4y - 6z &= -60 \\ 10x + 7y - 12z &= 45 \end{aligned}$$

und addiert man beide Gleichungen anschließend, so erhält man

$$\begin{aligned} -10x - 4y - 6z &= -60 \\ 3y - 18z &= -15 \end{aligned}$$

in der letzten Gleichung für y eine Abhängigkeit von z: $\quad y = -5 + 6z \quad (\mathrm{I})$.
Damit hat man die erste wichtige Gleichung. Schaut man sich noch einmal das Gleichungssystem vom Anfang an

$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= 30 \\ 10x + 7y - 12z &= 45 \end{aligned}$$

und multipliziert die obere Gleichung mit (-7) und die untere mit 2, so bekommt man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -35x - 14y - 21z &= -420 \\ 20x + 14y - 24z &= 90 \end{aligned}$$

Addiert man beide Gleichungen, so erhält man für x eine Abhängigkeit von z:

$$\begin{aligned} -35x - 14y - 21z &= -420 \\ -15x - 45z &= -330 \end{aligned}$$

bzw. anders geschrieben: $x = 22 - 3z \quad (\mathrm{II})$.
Zusammengefasst hat man:

$$\begin{aligned} x &= 22 - 4z \\ y &= -5 + 6z \\ z &= z \end{aligned}$$

Setzt man nun $z = \lambda$, erhält man bereits die Form einer Geraden: die Schnittgerade

$$g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 - 4\lambda \\ -5 + 6\lambda \\ 0 + \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zur Probe setzt man die Koordinaten der Schnittgerade in die beiden Ebenengleichungen ein:

$$E_1 : 5(22 - 4\lambda) + 2(-5 + 6\lambda) + 3\lambda = 30 \qquad \text{und} \qquad E_2 : 10(22 - 4\lambda) + 7(-5 + 6\lambda) - 12\lambda = 45$$

Äquivalenzumformungen ergeben:

$$E_1 \colon \lambda = 14 \qquad \text{und} \qquad E_2 : \lambda = 14$$

Damit ist das Gleichungssystem erfüllt und die Gerade g ist tatsächlich die Schnittgerade der beiden Ebenen E_1 und E_2.

1.7 Spurpunkte von Ebenen

Die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen heißen *Spurpunkte* der Ebene. Man bestimmt Spurpunkte, indem man in der Koordinatengleichung zwei Koordinaten Null setzt und die dritte Koordinate ausrechnet.

Beispiel: Gegeben sei die Koordinatengleichung der Ebene $E : 3x + 2y - 4z = 1$.

1. Fall: Schnittpunkt mit der x-Achse: $y = 0$ und $z = 0$

$$\begin{aligned} 3x + 0 + 0 &= 1 \\ 3x &= 1 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Der Spurpunkt auf der x-Achse ist: $Ax = (\frac{1}{3}/0/0)$.
2. Fall: Schnittpunkt der y-Achse: $x = 0$ und $z = 0$

$$\begin{aligned} 0 + 2y + 0 &= 1 \\ 2y &= 1 \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Der Schpurpunkt der y-Achse ist: $A_y = (0/\frac{1}{2}/0)$.
3. Fall: Spurpunkt der z-Achse: $x = 0$ und $y = 0$

$$\begin{aligned} 0 + 0 - 4z &= 1 \\ -4z &= 1 \\ z &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Der Spurpunkt der z-Achse ist: $A_z = (0/0/-\frac{1}{4})$.