

# Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung - SEK II

Andy Timmermann

## 3. Geraden

### 1 Geraden

Dieses Kapitel geht auf einige typischen Probleme mit Geraden und Geradengleichungen ein und soll auf das Kapitel 8 mit den Ebenen vorbereiten und Basiswissen schaffen.

#### 1.1 Parameterdarstellung einer Gerade

Eine Gerade ist unendlich lang und kann mit Hilfe eines Punktes  $A$  und einem Richtungsvektor  $\vec{u}$  eindeutig festgelegt werden. Es gilt für jeden Punkt  $X$ :

$$\vec{X} = \vec{A} + t \cdot \vec{u}$$

Wenn ein Punkt  $A(1, 2, -1)$  und ein Richtungsvektor  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  gegeben sind, erhält man folgende Parameterdarstellung:

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Punkt  $A$  wird hier also zum Stützvektor (oder auch Ortsvektor genannt),  $\vec{u}$  ist der Richtungsvektor und  $t$  ist ein Parameter. Aus diesem Grund nennt man diese Darstellung einer Geraden Parameterdarstellung.

#### 1.2 Punktprobe

Um zu überprüfen, ob ein Punkt  $X$  auf einer Geraden liegt, benötigt man die sogenannte Punktprobe. Wenn ein Punkt auf der Geraden liegt, so muss es einen eindeutigen Wert für den Parameter  $t$  geben, der die Parameterdarstellung der Geraden erfüllt. Anhand eines Beispiels soll diese Punktprobe illustriert werden.

**Beispiel 1:** Gegeben sind ein Punkt  $P(-1, 6, 5)$  und eine Gerade  $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Setzt man den Punkt  $P$  in die Vektorgleichung ein, so erhält man

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Umschreiben der Vektorgleichung in ein Gleichungssystem ergibt

$$\begin{aligned} -1 &= 5 + t \cdot (-3) \\ 6 &= 2 + t \cdot 2 \\ 5 &= 1 + t \cdot 2 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung ( $t = 2$ ), d.h. der Punkt  $P$  liegt auf der Geraden  $g$ . Das Überprüfen dieses Parameters sei dem Leser überlassen.

Dieses Verfahren zur Bestimmung von Punkten auf Geraden ist die häufigst angewandte Methode, da sie schnell und einfach handzuhaben ist. Punktproben gibt es auch bei Ebenen, nur dass dort zwei Parameter berechnet werden müssen.

### 1.3 Schnittpunkt zweier Geraden

Zunächst kann man untersuchen, ob die beiden Geraden zueinander parallel liegen. Geraden sind genau dann parallel zueinander, wenn die Richtungsvektoren (z.B.  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$ ) der Geraden ein Vielfaches voneinander sind. Für diesen Fall kann es keinen Schnittpunkt geben. Andernfalls ist der Schnittpunkt ein Punkt, der sowohl auf der einen Gerade (z.B.  $g$ ) als auch auf der anderen Gerade (z.B.  $h$ ) liegen muss.

Sind also nun zwei Geraden

$$\begin{aligned}g : \vec{X} &= \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} \\h : \vec{Y} &= \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

gegeben, so muss für den Schnittpunkt gelten:

$$\vec{A} + \lambda \cdot \vec{u} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$$

D.h. die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  müssen die Vektorgleichung erfüllen.

**Beispiel 1:** Gegeben sind die Geraden  $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$  und  $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ .

Für den Schnittpunkt gilt:  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ . Umschreiben der Vektorgleichung in ein Gleichungssystem ergibt

$$\begin{aligned}-1 + \lambda \cdot 1 &= 5 + \mu \cdot 4 \\4 + \lambda \cdot (-3) &= 1 + \mu \cdot 3 \\4 + \lambda \cdot (-2) &= -6 + \mu \cdot (-6)\end{aligned}$$

Löst man die erste Gleichung nach  $\lambda$  auf, so erhält man:

$$\lambda = 6 + 4\mu$$

$\lambda$  in Gleichung zwei eingesetzt liefert:

$$\begin{aligned}4 + (6 + 4\mu) \cdot (-3) &= 1 + 3\mu \\ \mu &= -1\end{aligned}$$

Also lauten die beiden Parameter  $\mu = -1$  und  $\lambda = 6 + 4 \cdot (-1) = 2$ . Als letztes muss noch überprüft werden, ob die bisher noch nicht verwendete dritte Gleichung für diese Parameter erfüllt ist:

$$\begin{aligned}4 + 2 \cdot (-2) &= -6 + (-6) \cdot (-1) \\ 0 &= 0\end{aligned}$$

Ja, das ist sie! Nun sind die Parameter zwar herausgefunden worden, allerdings fehlt noch der Schnittpunkt. Dazu müssen die Parameter in die Geradengleichungen  $g$  und  $h$  eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{S} &= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Parameter  $\lambda$  und  $\mu$  liefern den Schnittpunkt  $\vec{S}$ . Sie müssen nicht zwingend notwendig in beide Geradengleichungen eingesetzt werden. Es ist aber sehr hilfreich, denn so erkennt man, ob es wirklich einen gemeinsamen Schnittpunkt gibt.