

Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung - SEK II

Andy Timmermann

2. Kollinearitäts- und Komplanaritätsbedingung

1 Kollinearitätsbedingung

Was heißt eigentlich kollinear?

Kollinear bedeutet eigentlich nichts anderes als parallel. Zwei Vektoren sind genau dann zueinander kollinear (parallel), wenn einer von den beiden Vektoren ein Vielfaches von dem anderen ist.

Man beachte:

1. Ist einer von zwei Vektoren Null, so sind sie immer kollinear.
2. Zwei von Null verschiedene Vektoren (\vec{a} und \vec{b}) sind genau dann kollinear, wenn einer von den Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist. (d.h. wenn es ein Skalar λ gibt, so dass $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$ gilt).
3. Auch wenn zwei Vektoren in verschiedene Richtungen zeigen, sind sie kollinear.

Beispiel 1: Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind kollinear, denn $\vec{a} = 2 \cdot \vec{b}$

Beispiel 2: Die Vektoren $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}$ sind **nicht** kollinear, denn es existiert kein λ , so dass

$\vec{c} = \lambda \cdot \vec{d}$ gilt.

2 Komplanaritätsbedingung

Was heißt eigentlich komplanar? Komplanar bedeutet, dass Vektoren in einer gemeinsamen Ebene liegen (also nicht windschief zueinander liegen). Die *Komplanaritätsbedingung* lautet: $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, wobei λ und μ Skalare sind.

Damit Vektoren parallel (komplanar) zueinander liegen, muss einer der Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors sein. So auch bei 3 Vektoren.

Beispiel 1: Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Nach der Komplanaritäts-

bedingung muss gelten: $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$. Alle Vektoren besitzen **drei** Komponenten, so dass man jetzt **drei** Gleichungen aufstellen muss. Des Weiteren liegen zwei Vektoren genau dann parallel zueinander, wenn einer der Vektoren ein Vielfaches des anderen Vektors ist.

$$5 = 2 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu \quad (1)$$

$$1 = 3 \cdot \lambda + 6 \cdot \mu \quad (2)$$

$$-1 = 7 \cdot \lambda + 4 \cdot \mu \quad (3)$$

Nun hat man drei Gleichungen und zwei Unbekannte: also ein lösbares Problem. Zur Lösung wendet man das Additions-, Subtraktions- oder Einsetzungsverfahren an. Subtrahiert man (3) von (1), so erhält man

$$6 = -5 \cdot \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{6}{5}$$

Einsetzen von $\lambda = -\frac{6}{5}$ in (2) liefert

$$1 = -\frac{18}{5} + 6 \cdot \mu \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{23}{30}$$

Liegt nun Kollinearität vor, so müssen alle 3 Gleichungen für $\lambda = -\frac{6}{5}$ und $\mu = \frac{23}{30}$ erfüllt sein:

$$2 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) + 4 \cdot \frac{23}{30} \neq 5$$

$$3 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) + 6 \cdot \frac{23}{30} = 1$$

$$7 \cdot \left(-\frac{6}{5}\right) + 4 \cdot \frac{23}{30} \neq -1$$

Da dies hier nicht der Fall ist, kann für diese Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} keine Kollinearität vorliegen.