

# Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung - SEK II

Andy Timmermann

## 1. Eine Einführung: Rechnen mit Vektoren

### 1 Einleitung

Analytische Geometrie in vektorieller Darstellung ist ein wesentlicher Bestandteil im Mathematikunterricht der SEK II. Die ersten vier Seiten des Skriptes behandeln zunächst eine Einführung in die Schreibweisen von Vektoren und wie man mit ihnen rechnet. Insgesamt gibt es noch sechs weitere Kurzskeptre, so dass sich mein vollständiges Skript zur analytischen Geometrie wie folgt zusammensetzt:

1. Eine Einführung: Rechnen mit Vektoren
2. Kollinearitäts- und Komplanaritätsbedingung
3. Geraden
4. Orthogonalität
5. Ebenen
6. Abstandsprobleme
7. Der Kreis

Mit Hilfe von sehr vielen und ausführlichen **Rechenbeispielen** wird der theoretische Teil praktisch unterstützt und damit verständlich beschrieben. Gleichzeitig illustrieren viele Bilder die unterschiedlichsten Formeln und Darstellungen von Vektoren.

### 2 Einführung

#### 2.1 Was ist ein Vektor ?

*Eine Klasse paralleler Pfeile mit gleicher Länge und gleichem Richtungssinn heißt Vektor.*

Es gibt verschiedene Möglichkeiten Vektoren zu kennzeichnen: ein Pfeil, Fettdruck oder eine Unterstreichung. Im Folgenden wird die Schreibweise mit dem Pfeil verwendet. Gibt man nun z.B. dem Vektor den Buchstaben  $a$ , dann sieht das so aus:  $\vec{a}$

**Beispiel 1:**  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Seine „Eintragungen“ - also die Zahlen 2,-1 und 2 - sind seine *Komponenten* oder auch *Vektorkoordinaten* genannt. Die erste Komponente ist 2, die zweite -1 usw. Da seine Komponenten untereinander geschrieben sind, nennt man ihn Spaltenvektor. Eine weitere Möglichkeit einen Vektor zu schreiben ist als Zeilenvektor:

**Beispiel 2:**  $\vec{a} = (2, -1, 2)$

Vektoren, die nur zwei Eintragungen haben, sind zweidimensional (oder zweikomponentig) und Vektoren, die drei Eintragungen haben, sind dreidimensional (oder dreikomponentig). Allgemein spricht man von n-dimensionalen (n-komponentigen) Vektoren. Wenn  $n = 1$  ist, dann spricht man entweder von einem eindimensionalen Vektor oder von Skalaren. Zahlen bezeichnet man demnach in der Analytischen Geometrie als *Skalare*.

## 2.2 Betrag eines Vektors

Die Länge eines Vektors heißt *Betrag*, der eine positive skalare Größe ist, es sei denn es handelt sich um den Nullvektor, dessen Betrag Null ist (in jeder beliebigen Richtung). Der Betrag eines dreidimensionalen Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

lässt sich mit dem Satz des Pythagoras berechnen:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

**Beispiel 1:** Der Betrag des Vektors  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$  ist  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 25 + 16} = \sqrt{50} \approx 7,1$

Ein Vektor  $\vec{a}$  heißt *normiert*, falls  $|\vec{a}| = 1$  gilt. Er hat also die Länge 1.

## 2.3 Eigenschaften des Betrags

Vektoren können folgende Eigenschaften haben:

- $|\vec{a}| \geq 0$  gilt für alle Vektoren
- $|\vec{a}| = 0 \Rightarrow \vec{a} = 0$
- $\lambda \cdot |\vec{a}| = |\lambda \cdot \vec{a}|$ , wobei  $\lambda$  ein Skalar ist
- $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$
- $|\vec{a}| - |\vec{b}| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

## 3 Rechnen mit Vektoren

Das Rechnen mit Vektoren ist für die meisten Schüler/innen neu und muss deshalb intensiv behandelt werden. Die folgenden Rechenregeln verschaffen einen ersten Zugang im Umgang mit der Vektorrechnung und sind elementar.

### 3.1 Addition von Vektoren

Die geometrische Interpretation, wie man zwei Vektoren addiert, ist, dass man einen der Vektoren so parallel verschiebt, dass sein Anfangspunkt am Endpunkt des anderen Vektors liegt. Dann verbindet man den Anfangspunkt des einen Vektors mit dem Endpunkt des anderen Vektors (s. Abbildung 1). Es gilt also nach der

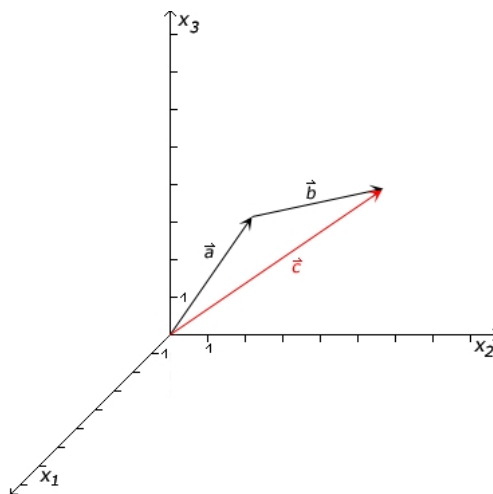


Abbildung 1: Addition zweier Vektoren

Zeichnung bei der Addition von Vektoren:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ .

**Beispiel 1:** Seien  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  zwei Vektoren. Dann ist  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 3+4 \\ 1-2 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Des Weiteren gelten folgende Rechenregeln:

i)  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$  *Kommutativgesetz*

ii)  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  *Assoziativgesetz*

### 3.2 Subtraktion von Vektoren

Geometrische Interpretation: zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man den Startpunkt des Gegenvektors des zweiten Vektors an den Endpunkt des ersten Vektors anschließt. Geometrisch entspricht die Differenz dem Verbindungsvektor zwischen den Endpunkten des zweiten und des ersten Vektors.

Die Differenz  $\vec{a} - \vec{b}$  (s. Abbildung 2) ergibt den Vektor  $\vec{c}$ , der mit  $\vec{b}$  addiert den Vektor  $\vec{a}$  ergibt.

**Beispiel 1:** Seien  $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  zwei Vektoren. Dann ist  $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 0-3 \\ 9-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

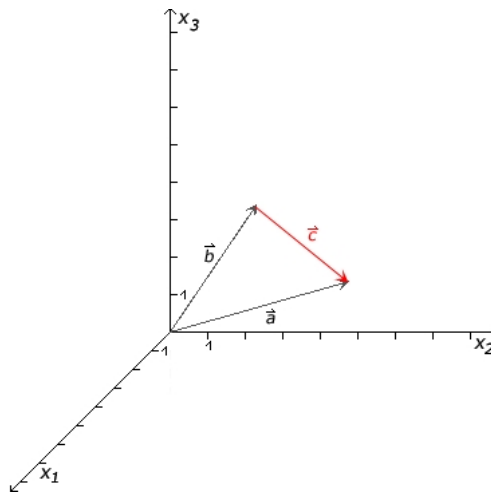


Abbildung 2: Subtraktion zweier Vektoren

### 3.3 Multiplikation mit einem Skalar

Vektoren können ohne Probleme mit einer reellen Zahl (Skalar) multipliziert werden (*Skalarmultiplikation*):

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_x \\ \lambda \cdot a_y \\ \lambda \cdot a_z \end{pmatrix}$$

Wenn das Skalar positiv (z.B. +1) ist, zeigt der Vektor  $\vec{a}$  in dieselbe Richtung. Bei einem negativen Skalar (z.B. -1) ändert der Vektor  $\vec{a}$  seine Richtung.

Das *Distributivgesetz* gilt bei Vektoraddition und Skalarmultiplikation von Vektoren:

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

### 3.4 Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt beschreibt die 'Multiplikation' zweier Vektoren. Es wird so genannt, da das Ergebnis ein Skalar ist und wird in der Regel  $\vec{a} \bullet \vec{b}$  oder  $\langle \vec{a}; \vec{b} \rangle$  geschrieben, wobei in diesem Skript die erste Schreibweise verwendet wird. Das Skalarprodukt kann mit der Formel

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$$

berechnet werden, wobei  $\alpha$  der eingeschlossene Winkel zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist. Stehen die beiden Vektoren orthogonal (rechtwinklig) zueinander, so ist das Skalarprodukt Null, denn  $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos 90^\circ = 0$ .

Im kartesischen Koordinatensystem berechnet man das Skalarprodukt mit

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Ein Spezialfall ist das Skalarprodukt zweier identischer Vektoren:

$$\vec{a} \bullet \vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

Beim Skalarprodukt gelten ebenfalls Distributiv- und Kommutativgesetz, jedoch nicht das Assoziativgesetz.

**Beispiel 1:** Das Skalarprodukt von  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  ist:  $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 = -4$

**Beispiel 2:** Der Winkel zwischen  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  ist:  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{180}} \approx 0,37$

Damit beträgt der Winkel  $\alpha \approx 68,12^\circ$