

# Analysis - SEK II

Andy Timmermann

## 1.2 Ableitungen

### 1 Definition der Ableitung

Wenn man sich den Begriff der Ableitung geometrisch veranschaulichen möchte, so bedient man sich der Steigung. Dabei ist die Ableitung einer beliebigen Funktion an einer Stelle  $x_0$  definiert als die Steigung der Tangenten im Punkt  $(x_0; f(x_0))$  des Graphen von  $f$ . Oder anders formuliert: Der Grenzwert bildet die Ableitung der Funktion  $f(x)$  an einer Stelle  $x_0$ :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

### 2 Die Ableitungsregel

Sei  $f(x) = a \cdot x^n$  die abzuleitende Funktion. Dann lautet die Ableitungsfunktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot x^n \\ f'(x) &= a \cdot n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

wobei  $a$  ein beliebiger Faktor und  $n$  die Potenz von  $x$  sind. Aber wie lautet die Ableitung, wenn  $f(x) = x$  oder  $f(x) = 4x$  ist? Es gilt nach der Ableitungsregel:

$$\begin{aligned} f(x) &= x = 1 \cdot x^1 \\ f'(x) &= 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \end{aligned}$$

Bei einigen Funktionen handelt es sich z.B. nur um eine Gerade: etwa  $f(x) = 4$ . Die Ableitung solcher Funktionen, bei denen die Potenz 0 ist, ist immer 0. Sei als Beispiel die Funktion  $f(x) = 3$  gegeben. Dann ist die Ableitung durch

$$f'(x) = 0$$

gegeben, weil  $f(x) = 3 \cdot \underbrace{x^0}_{=1}$  und damit  $f'(x) = 3 \cdot 0 = 0$ . Bislang kamen immer nur Multiplikationen in den Funktionen vor. Dies ist aber im Folgenden nur sehr selten der Fall. In der Regel werden kompliziertere Funktionen betrachtet, bei denen man aber einfach die Ableitung jedes Summanden bilden muss:

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x) + b(x) \\ f'(x) &= a'(x) + b'(x) \end{aligned}$$

Oftmals benötigt man - vor allem in der Kurvendiskussion - noch weitere Ableitungen. Dabei gilt noch immer dieselbe Regel, nur dass man mehrfach hintereinander ableitet. Als Beispiel sollen die ersten 3 Ableitungen der Funktion  $f(x) = 3 \cdot x^4$  gebildet werden:

$$\begin{aligned} 1. \text{Ableitung} : & f'(x) = 12 \cdot x^3 \\ 2. \text{Ableitung} : & f''(x) = 36 \cdot x^2 \\ 3. \text{Ableitung} : & f'''(x) = 72 \cdot x^1 \end{aligned}$$

## 2.1 Beispiele

In diesem kurzen Kapitel werden einige Beispiele zum Ableiten von Funktionen gegeben.

Funktion	Ableitung
$x^3$	$3x^2$
$x^5$	$5x^4$
$x^4 + \frac{1}{2}x^3$	$4x^3 + \frac{3}{2}x^2$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

## 2.2 Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Bei den Trigonometrischen Funktionen (Winkelfunktionen) ist ein wenig schwieriger. Hier gelten folgende Ableitungsregeln:

$$\begin{aligned}f(x) = \sin(x) &\longrightarrow f'(x) = \cos(x) \\f(x) = \cos(x) &\longrightarrow f'(x) = -\sin(x) \\f(x) = \tan(x) &\longrightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) \\f(x) = \cot(x) &\longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}\end{aligned}$$

Die Winkelfunktionen spielen vor allem in der Physik eine große Rolle, wo sie u.a. bei Schwingungen und Wellen vielfältig verwendet werden. Für den Matheunterricht sollte man die Ableitungsfunktionen einfach auswendig lernen.

## 3 Ketten-, Produkt- und Quotientenregel

### 3.1 Kettenregel

Die Kettenregel wird benötigt, wenn zusammengesetzte oder gar verschachtelte Funktionen abgeleitet werden müssen. Die Funktion  $f(x) = \sin(3x^2 - 3)$  lässt sich leider nicht mit den bisherigen Ableitungsregeln ableiten. Hierfür benötigt man die Kettenregel. Der folgende Merksatz ist hilfreich, um sich die Kettenregel zu merken:

**Die Kettenregel ist das Produkt aus äußerer und innerer Ableitung**

Die formale Schreibweise für die Kettenregel ist

$$\begin{aligned}f(x) &= g(h(x)) \\f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x)\end{aligned}$$

#### 3.1.1 Beispiel

Um die Kettenregel einmal anzuwenden, sei die Funktion  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} = (x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$  gegeben. Zunächst muss dafür  $g(x)$ ,  $h(x)$  und  $g(h(x))$  gesetzt werden:

$$\begin{aligned}h(x) &:= x^2 + 2 \\g(x) &:= \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \\g(h(x)) &:= \sqrt{(x^2 + 2)}\end{aligned}$$

Die 1. Ableitung dieser Funktion ist also mit der Kettenregel:

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

## 3.2 Produktregel

Liegen Funktionen in einer Produktform (z.B.  $f(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x}$ ) vor, so benötigt man die Produktregel. Sie lautet:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) \cdot v(x) \\ f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Bei der Produktregel muss man einen Teil als  $u(x)$  und einen Teil als  $v(x)$  bezeichnen. Dies soll an einem Beispiel illustriert werden:

### 3.2.1 Beispiel

Es sei die Funktion  $f(x) = (2x^2 - 5x) \cdot x^3$  gegeben. Setze

$$\begin{aligned} u(x) &:= (2x^2 - 5x) \\ v(x) &:= x^3 \end{aligned}$$

Dann sind die Ableitungen von  $u(x)$  bzw.  $v(x)$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= (4x - 5) \\ v'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Ableitungen in die Produktregel ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) \\ &= (4x - 5) \cdot x^3 + (2x^2 - 5x) \cdot 3x^2 \\ &= 4x^4 - 5x^3 + 6x^4 - 15x^3 \\ &= 10x^4 - 20x^3 \end{aligned}$$

## 3.3 Quotientenregel

Die Quotientenregel benötigt man, wenn man einen Bruch ableiten will. Sie lautet:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \end{aligned}$$

Wie bei der Produktregel müssen hier  $u(x)$  und  $v(x)$  gesetzt werden. Das folgende Beispiel illustriert dies:

### 3.3.1 Beispiel

Es sei die Funktion  $f(x) = \frac{3x^2}{4x-3}$  gegeben. Setze

$$\begin{aligned} u(x) &:= 3x^2 \\ v(x) &:= (4x - 3) \end{aligned}$$

Dann sind die Ableitungen von  $u(x)$  bzw.  $v(x)$ :

$$\begin{aligned} u'(x) &= 6x \\ v'(x) &= 4 \end{aligned}$$

Setzt man nun diese Ableitungen in die Quotientenregel ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{6x \cdot (4x - 3) - 3x^2 \cdot 4}{[(4x - 3)]^2} \\ &= \frac{24x^2 - 18x - 12x^2}{16x^2 - 24x + 9} \\ &= \frac{12x^2 - 18x}{16x^2 - 24x + 9} \end{aligned}$$